

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки)

Научная статья

УДК 519.85:519.233.5:004.032.26

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРОПУСКАМИ В ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ЕДИНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ «ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ + РЕКУРРЕНТНАЯ СЕТЬ»

Живетьев Александр Викторович, кандидат технических наук,
Университет Дубна, Россия, Дубна, dubna.zhivetev@yandex.ru;

Климачев Сергей Александрович, кандидат технических наук, доцент,
Оренбургский государственный университет им. В.А. Бондаренко, Россия,
Оренбург, s.klimachev@mail.ru

Аннотация. Фрагментарность сенсорных сигналов и нелинейная природа физических процессов неизбежно искажают классические процедуры оценивания скрытых переменных. В работе предложена единая вариационная схема, объединяющая стохастическую модель пространства состояний с рекуррентной сетью вывода, обрабатывающей последовательность в обратном направлении. Оптимизация вариационной нижней границы (ELBO) выполняется методом стохастического градиентного спуска с аналитическим вычислением расхождения Кульбака - Лейблера. Ключевым отличием от существующих подходов выступает явное вероятностное моделирование механизмов утраты данных. Алгоритм корректно маргинализует отсутствующие компоненты вектора наблюдений, устраняя систематическое смещение оценок, характерное для наивного маскирования при информативных пропусках. Теоретический анализ информационной матрицы Фишера строго обосновывает локальную структурную идентифицируемость параметров нелинейных переходных функций с точностью до инвариантных преобразований латентного пространства. Вычислительный эксперимент на эталонных нелинейных системах - хаотическом аттракторе Лоренца и осцилляторе Дуффинга -

демонстрирует высокую робастность метода. При доле зависимых от состояния пропусков до 50 % и аддитивном шуме до 30 % разработанная схема снижает среднеквадратичную ошибку реконструкции фазовых траекторий в четыре раза относительно стандартных фильтров Калмана и детерминированных рекуррентных архитектур. Полученные результаты создают математическую основу для применения глубоких генеративных моделей в задачах системной диагностики и синтеза регуляторов технических объектов в условиях существенной неопределенности наблюдений.

Ключевые слова: идентификация нелинейных систем; пространство состояний; вариационный автокодировщик; рекуррентные нейронные сети; пропуски в данных; механизм MNAR; идентифицируемость параметров; информационная матрица Фишера; нижняя граница доказательности.

Original article

IDENTIFICATION OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH DATA GAPS BASED ON A UNIFIED PROBABILISTIC STATE-SPACE + RECURRENT NETWORK MODEL

Zhivetev Aleksandr Viktorovich, Candidate of Technical Sciences, Dubna State University, Dubna, Russia, dubna.zhivetev@yandex.ru;

Klimachev Sergey Aleksandrovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Orenburg State University named after V.A. Bondarenko, Orenburg, Russia, s.klimachev@mail.ru

Abstract. The fragmentary nature of sensory signals and the nonlinear nature of physical processes inevitably distort classical latent variable estimation procedures. This paper proposes a unified variational framework that integrates a stochastic state space with a recurrent inference network processing the sequence in the backward direction. Optimization of the lower bound of evidence is achieved using stochastic gradient descent with an analytical calculation of the Kullback-Leibler divergence. A key difference from existing approaches is the explicit probabilistic modeling of data

loss mechanisms. The algorithm correctly marginalizes missing components of the observation vector, eliminating the systematic bias in estimates characteristic of naive masking due to informative omissions. A theoretical analysis of the Fisher information matrix rigorously substantiates the local structural identifiability of the parameters of nonlinear transition functions up to invariant transformations of the latent space. A computational experiment on benchmark nonlinear systems-the chaotic Lorenz attractor and the Duffing oscillator-demonstrates the method's high robustness. With a state-dependent gap rate of up to 50% and additive noise of up to 30%, the developed scheme reduces the mean square error of phase trajectory reconstruction by a factor of four compared to standard Kalman filters and deterministic recurrent architectures. The obtained results provide a reliable mathematical basis for the application of deep generative models in system diagnostics and controller synthesis for technical facilities under conditions of significant observational uncertainty.

Keywords: nonlinear system identification; state space; variational autoencoder; recurrent neural networks; missing data; MNAR mechanism; parameter identifiability; Fisher information matrix; lower bound on evidence.

Введение. Фундаментальной сложностью при построении математических описаний технических объектов выступает нелинейный характер их внутренней динамики, усугубляемый фрагментарностью регистрируемых сигналов. На практике в сенсорных системах отдельные измерения теряются из-за сбоев оборудования, асинхронности опроса или физических ограничений среды, что превращает классическую задачу оценивания в задачу статистического вывода при наличии скрытых переменных [1]. Традиционный аппарат линейных гауссовских моделей пространства состояний здесь оказывается несостоятельным, поскольку не способен адекватно отразить существенные нелинейные искажения, присущие реальным физическим процессам [2]. Между тем именно учет стохастической природы пропусков наряду с нелинейностью переходных функций определяет соответствие идентифицируемой модели

реальному поведению системы [3].

Исторически сложившийся подход к параметрической идентификации таких систем опирается на алгоритм максимизации математического ожидания в связке с методами нелинейной фильтрации [4]. Подобные гибридные схемы демонстрируют приемлемую точность исключительно в задачах малой размерности. При переходе к многомерным временным рядам вычислительная сложность процедур усреднения по скрытым состояниям возрастает экспоненциально, а жесткие априорные предположения о виде аналитических уравнений вступают в противоречие с априорной неопределенностью, характерной для реальных инженерных объектов [5]. Возникает противоречие между необходимостью точного байесовского вывода и высокой вычислительной сложностью его реализации в пространствах большой размерности.

Альтернативным направлением развития методов обработки последовательностей стало применение рекуррентных архитектур, способных аппроксимировать сложные нелинейные зависимости без явного задания параметрических уравнений [6]. Тем не менее прямое использование детерминированных рекуррентных сетей в задачах системной идентификации имеет существенный методологический недостаток. Такие архитектуры лишены вероятностной семантики, необходимой для корректной работы с неполными наблюдениями. При наличии разрывов во временных рядах стандартные механизмы распространения ошибки не позволяют разделить неопределенность, вызванную шумом измерений, и неопределенность, порожденную отсутствием самих данных, что ведет к смещению оценок и потере устойчивости обучаемой модели.

Попытки механического объединения классических стохастических схем и глубоких архитектур, как правило, нарушают единство процедуры оптимизации. Когда процедура оценивания скрытых состояний и процедура настройки весовых коэффициентов нелинейного отображения выполняются

раздельно или чередуются без строгого математического обоснования, исследователь сталкивается с проблемой несогласованности оценок. Формируется ситуация, при которой отсутствует единая функция правдоподобия, связывающая наблюдаемые выборки с латентными переменными. Градиенты, используемые для обновления параметров генеративной модели, становятся несогласованными, поскольку рассчитываются на основе аппроксимации апостериорного распределения, которая не учитывает марковскую структуру исходной модели и корректную маргинализацию пропущенных компонентов [7-9].

Преодоление указанных ограничений требует перехода к концепции, в которой вероятностное пространство состояний и аппарат нелинейной аппроксимации интегрированы на уровне единой вариационной схемы. Формирование обобщенной генеративной модели, где функции перехода и наблюдения параметризуются многослойными перцептронами, а процедура байесовского вывода аппроксимируется с помощью вспомогательной рекуррентной сети, позволяет сохранить строгую стохастическую интерпретацию [10]. Такое объединение обеспечивает математически обоснованную работу с пропусками: отсутствующие компоненты вектора наблюдений маргинализируются на уровне факторизованной функции правдоподобия без нарушения единой процедуры градиентной оптимизации [11]. Именно разработка и адаптация такого унифицированного вероятностного каркаса, сочетающего строгость гауссовских моделей пространства состояний с выразительной силой нелинейных рекуррентных зависимостей, составляет предмет настоящего исследования и задает его методологическую рамку.

Обзор литературы. Фундаментальные принципы идентификации динамических объектов, сформулированные в классических работах по теории предикционной ошибки, исходят из принципиального различия между математическим описанием и физической реальностью. Как справедливо подчеркивал Л. Юнг, никакая, даже предельно сложная параметрическая

конструкция не тождественна самому объекту, а лишь отражает его свойства с определенной степенью достоверности. Традиционный аналитический аппарат, опирающийся на рекуррентные процедуры оценивания, такие как алгоритм максимизации математического ожидания или расширенные версии фильтра Калмана, демонстрирует высокую состоятельность исключительно в условиях линейности или слабой нелинейности процессов. При переходе к системам с существенно нелинейной динамикой и высокоразмерными пространствами наблюдений вычислительная сложность численного интегрирования апостериорных плотностей возрастает экспоненциально, что вынуждает исследователей прибегать к жестким априорным допущениям, искажающим истинную природу переходных функций [12-14].

Преодоление указанного вычислительного барьера стимулировало методологический сдвиг в сторону глубоких генеративных моделей последовательностей. Знаковой вехой в этом направлении стало внедрение концепции структурированных сетей вывода для нелинейных моделей пространства состояний, предложенной Кришнаном и соавторами. Авторы обосновали возможность компиляции процедуры байесовского вывода непосредственно в веса рекуррентной нейронной сети, что позволило масштабировать вариационное обучение на большие массивы временных рядов. Ключевым теоретическим результатом данной работы стало доказательство того, что факторизация истинного апостериорного распределения в марковских процессах определяется не только предшествующей историей скрытых переменных, но и последующими наблюдениями. Следовательно, архитектуры, использующие исключительно причинно-следственную (однаправленную) агрегацию информации, структурно неспособны аппроксимировать точный байесовский вывод, что неизбежно приводит к ослаблению вариационной нижней границы и ухудшению качества генеративной модели [15].

Несмотря на методологическую стройность вариационной схемы глубоких марковских моделей, при ее адаптации к условиям фрагментарности

наблюдений остается существенный пробел. Существующие реализации, включая успешные приложения в области анализа электронных медицинских карт, разрешают проблему пропусков посредством прямой маргинализации отсутствующих компонент вектора измерений. Подобный подход строго обоснован лишь при условии, что данные отсутствуют совершенно случайно (MCAR) или случайно в зависимости от наблюдаемых величин (MAR), поскольку в этих сценариях механизм утраты данных статистически независим от латентного состояния [16], [17]. Однако в реальных технических системах отказ сенсора или сбой регистрации часто провоцируются экстремальными значениями фазовых координат, что соответствует механизму пропусков, не случайному даже при условии скрытых переменных (MNAR).

Игнорирование информативного характера механизма утраты данных имеет существенные последствия для оценки параметров модели. В контексте классической теории идентификации возникает угроза потери идентифицируемости: когда процесс формирования пропусков не моделируется явно, градиентный поток, направляющий оптимизацию весов переходной и эмиссионной функций, оказывается смещенным. Алгоритм начинает интерпретировать систематическое отсутствие данных в определенных областях фазового пространства как априорную характеристику самой динамики, а не как артефакт процесса наблюдения. Таким образом, существующий задел, обеспечивая мощный инструмент для нелинейной аппроксимации, оставляет открытым вопрос о создании единого вероятностного каркаса, способного совместно оценивать параметры сложной динамики и структуру механизма пропусков, гарантируя при этом локальную идентифицируемость параметров в условиях высокой неопределенности наблюдений.

Материалы и методы исследования. В работе мы формулируем полную генеративную модель, объединяющую динамику скрытых состояний, процесс наблюдения и механизм возникновения пропусков. Пусть z_t обозначает вектор скрытых состояний, x_t – вектор наблюдаемых переменных, а $m_t \in \{0,1\}^D$ –

бинарный вектор индикаторов пропусков для каждого из D измерений в момент времени t . Совместное распределение факторизуется следующим образом:

$$p(x, z, m) = p(z_1) \prod_{t=2}^T p(z_t | z_{t-1}) p(x_t | z_t) p(m_t | z_t, x_t) \quad (1)$$

Начальное состояние $p(z_1)$ задается стандартным гауссовским распределением. Переходное распределение $p(z_t | z_{t-1})$ параметризуется с помощью затворной рекуррентной архитектуры, что позволяет моделировать как линейные, так и существенно нелинейные переходы. Модель наблюдения $p(x_t | z_t)$ описывает распределение измерений при известном скрытом состоянии. Ключевым элементом, отличающим наш подход от предыдущих работ, является явное введение модели пропусков $p(m_t | z_t, x_t)$.

Для аппроксимации апостериорного распределения $p(z | x, m)$ мы выбираем структурированную сеть вывода, работающую в направлении от будущего к прошлому (ST-R), также известную как глубокий сглаживатель Калмана. Данная архитектура использует рекуррентную сеть, обрабатывающую последовательность наблюдений в обратном порядке, чтобы сформировать контекстное представление будущих данных. Параметры гауссовского апостериорного распределения для z_t вычисляются на основе скрытого состояния обратной рекуррентной сети и предыдущего скрытого состояния z_{t-1} , что соответствует марковским свойствам истинного апостериорного распределения. Обучение модели осуществляется путем максимизации нижней границы доказательности (ELBO).

Вопрос учета пропусков требует четкого разделения механизмов их возникновения. Если данные отсутствуют совершенно случайно (MCAR) или случайно в зависимости от наблюдаемых величин (MAR), механизм пропусков игнорируется при выводе, а отсутствующие компоненты вектора x_t исключаются из суммы логарифмического правдоподобия с помощью маски. Однако в случае, когда пропуски зависят от скрытого состояния (MNAR), простое маскирование приводит к смещенным оценкам. В этом сценарии мы

явно включаем логарифм правдоподобия модели пропусков $\log p(m_t|z_t, x_t)$ в целевую функцию, позволяя вариационной схеме совместно оценивать динамику системы и механизм потери данных.

Наиболее сложной теоретической проблемой является анализ идентифицируемости параметров θ генеративной модели. Стандартная проверка ранга информационной матрицы Фишера для нейросетевых латентных моделей сталкивается с фундаментальными трудностями из-за симметрий латентного пространства. В частности, параметры модели не могут быть идентифицированы однозначно из-за инвариантности к ортогональным преобразованиям, перестановкам скрытых нейронов и масштабированию. Поэтому мы доказываем условие локальной структурной идентифицируемости параметров с точностью до класса эквивалентности, порожденного этими тривиальными симметриями. Мы показываем, что при условии достаточной выразительности переходной и эмиссионной сетей, а также при наличии информативной модели пропусков $p(m_t|z_t, x_t)$ в случае MNAR, информационная матрица Фишера имеет полный ранг в факторпространстве по модулю симметрий. Это гарантирует, что градиентный спуск сходится к истинным параметрам с точностью до допустимых преобразований координат.

Результаты исследования и их обсуждение. Вычислительный эксперимент проводился на трех эталонных нелинейных динамических системах: хаотической системе Лоренца, нелинейном осцилляторе Дуффинга и стохастической модели «хищник–жертва» с нелинейным функциональным откликом. Для каждой системы генерировались временные ряды длиной 1000 отсчетов. Пропуски в данные вносились двумя способами: по механизму MCAR (равномерное случайное удаление) и по механизму MNAR (вероятность пропуска возрастала при экстремальных значениях скрытого состояния, что имитирует насыщение сенсоров). Доля пропусков варьировалась от 10 до 50 %. К наблюдаемым данным добавлялся аддитивный гауссовский шум с дисперсией, составляющей 5-30 % мощности сигнала.

В качестве метрик качества мы использовали среднеквадратичную ошибку (RMSE), среднюю абсолютную ошибку (MAE), коэффициент детерминации R^2 и отрицательное логарифмическое правдоподобие (NLL) на тестовой выборке (таблица 1). Предлагаемый метод (ST-R с явной моделью MNAR) сопоставлялся с тремя базовыми подходами: линейной моделью пространства состояний, обучаемой через EM-алгоритм; рекуррентной сетью LSTM без вероятностной модели; и гауссовской процессной моделью пространства состояний (GPSSM).

Таблица 1 - Сравнение методов идентификации при различных механизмах и долях пропусков (система Лоренца, шум 15 %)

Метод	MCAR 10% (RMSE)	MCAR 50% (RMSE)	MNAR 30% (RMSE)	MNAR 30% (NLL)
Линейная SS + EM	1.42	3.85	4.12	145.2
Чистая LSTM	0.98	2.14	3.56	112.4
GPSSM	0.65	1.21	1.85	84.3
Предлагаемый ST-R (MAR/MCAR)	0.41	0.89	2.45	95.1
Предлагаемый ST-R (с моделью MNAR)	0.40	0.87	0.52	42.6

Источник: разработано авторами.

Анализ данных, представленных в таблице 1, выявляет критическую зависимость качества идентификации от адекватности модели пропусков. LSTM демонстрирует удовлетворительные результаты при небольшой доле пропусков MCAR, однако качество ее работы существенно снижается в сценарии MNAR. Отсутствие вероятностной оболочки не позволяет архитектуре отделить шум от систематического отсутствия данных при экстремальных значениях. Гауссовская процессная модель (GPSSM) показывает высокую точность, но ее вычислительная сложность не позволяет масштабировать подход на многомерные системы без существенных упрощений. Предложенный нами подход с явным моделированием механизма MNAR позволяет снизить ошибку реконструкции траектории более чем в четыре раза по сравнению с наивным маскированием, что подтверждает теоретические выводы о необходимости учета информативности самих пропусков.

Далее было проведено исследование робастности и выполнен

абляционный анализ архитектуры. Мы оценивали влияние длины обучающей последовательности, размерности латентного пространства и выбора типа рекуррентной ячейки (GRU против LSTM) в сети вывода (таблица 2).

Таблица 2 - Результаты абляционного исследования архитектуры сети вывода (система Дуффинга, MNAR 20 %)

Параметр архитектуры	Значение	RMSE	Время обучения (сек/эпоха)
Тип ячейки	GRU	0.38	1.2
	LSTM	0.34	1.8
Размерность z	5	0.55	0.9
	10	0.34	1.8
	20	0.36	3.4
Длина последовательности	50	0.48	0.8
	200	0.34	2.9

Источник: разработано авторами.

Результаты абляционного исследования показывают, что использование ячеек LSTM в сети вывода обеспечивает несколько более высокое качество реконструкции благодаря более эффективному учету долгосрочных зависимостей, что особенно важно для систем с выраженной инерционностью, таких как осциллятор Дуффинга. Увеличение размерности латентного пространства сверх физически обоснованного минимума (в данном случае 10) не улучшает качество, а ведет к переобучению и росту вычислительных затрат. Длина последовательности напрямую влияет на способность модели оценивать глобальные аттракторы: при длине 50 квантов модель теряет информацию о глобальной топологии фазового пространства.

Особое внимание было уделено практической проверке идентифицируемости параметров переходной функции (таблица 3). Мы оценивали, насколько точно веса нейросетевой аппроксимации переходного распределения совпадают с истинными параметрами (с точностью до ортогонального преобразования).

Таблица 3 - Ошибка восстановления параметров переходной функции при росте доли MNAR

Доля пропусков MNAR	Ошибка параметров (наивное маскирование)	Ошибка параметров (предлагаемый метод)
10 %	0.08	0.07
30 %	0.24	0.09
50 %	0.58	0.14

Источник: разработано авторами.

Данные таблицы 3 наглядно демонстрируют, что при игнорировании механизма MNAR ошибка восстановления параметров нелинейно возрастает, достигая значений, при которых модель полностью утрачивает физический смысл. Интеграция модели пропусков в единый вариационный каркас позволяет стабилизировать градиентный спуск и сохранить локальную идентифицируемость параметров даже при потере половины данных, при условии, что механизм пропусков несет достаточную статистическую информацию о скрытом состоянии.

Таким образом, проведенное исследование подтверждает, что объединение вероятностной модели пространства состояний с рекуррентными аппроксиматорами в единой вариационной схеме позволяет решать задачу идентификации нелинейных систем в условиях неинформативных и информативных пропусков. Явное моделирование механизма MNAR и учет симметрий латентного пространства при анализе идентифицируемости формируют надежный математический фундамент для применения глубоких генеративных моделей в задачах системного анализа и управления техническими объектами.

Выводы. Проведенное исследование показывает, что интеграция строгих стохастических схем пространства состояний с выразительными возможностями рекуррентных архитектур вывода позволяет преодолеть фундаментальные ограничения классических методов фильтрации. Разработанный единый вероятностный каркас дает возможность математически обоснованно восстанавливать траектории скрытых переменных даже в тех случаях, когда

механизм утраты данных несет в себе статистическую информацию о динамике объекта. Явное разделение процессов генерации наблюдений и формирования пропусков устраняет систематическое смещение оценок, неизбежно возникающее при использовании наивных подходов, опирающихся исключительно на маскирование отсутствующих компонент.

Вместе с тем, достижение подобной точности требует значительных вычислительных ресурсов. Применение двунаправленных рекуррентных сетей в качестве структурного аппроксиматора апостериорного распределения, а также использование комбинирующей функции для согласования информации из прошлого и будущего существенно повышают вычислительную сложность стохастической градиентной оптимизации. При обработке длинных временных рядов или систем с высокой размерностью латентного пространства затраты памяти и времени на вычисление градиентов нижней границы доказательности возрастают нелинейно, что ограничивает применимость метода в задачах, требующих работы в реальном времени.

Другим существенным ограничением текущей модификации модели выступает жесткое допущение о стационарности шумовых воздействий. Параметризация ковариационных матриц переходных и эмиссионных распределений в рамках диагональной аппроксимации предполагает, что дисперсия возмущений остается неизменной на протяжении всего интервала наблюдения. Однако для многих реальных технических объектов, где уровень неопределенности существенно зависит от текущей фазы динамического процесса или амплитуды скрытых переменных, подобное упрощение ведет к потере эффективности байесовского вывода в экстремальных режимах функционирования.

Устранение указанных ограничений открывает путь к дальнейшим изысканиям, направленным на расширение класса идентифицируемых объектов. Перспективным направлением представляется адаптация предложенного вариационного каркаса для анализа мультирежимных систем, чья динамика

переключается между качественно различными состояниями. Внедрение механизмов марковских скачкообразных процессов или смесевых моделей плотности в функции перехода позволит описывать объекты с разрывными фазовыми траекториями. Параллельно планируется отказ от предположения о гомоскедастичности ошибок за счет явного моделирования зависимости дисперсии шума от скрытых переменных, что повысит робастность алгоритма при работе с нестационарными физическими процессами.

Список литературы

1. Beintema G. I., Schoukens M., Tóth R. Deep Subspace Encoders for Nonlinear System Identification // *Automatica*. 2023. Vol. 156. Art. 111210. DOI: 10.1016/j.automatica.2023.111210.
2. Цымблер М. Л., Юртин А. А. Восстановление пропущенных значений временного ряда на основе совместного применения аналитических алгоритмов и нейронных сетей // *Вычислительные методы и программирование*. 2023. Т. 24. № 3. С. 243–259. DOI: 10.26089/NumMet.v24r318.
3. Ansari A. F., Heng A., Lim A., Soh H. Neural Continuous-Discrete State Space Models for Irregularly-Sampled Time Series // *Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning (ICML 2023)*. PMLR. 2023. Vol. 202. P. 926–951.
4. Алешновский В. С., Безрукова А. В., Авилов В. К., Газарян В. А., Курбатова Ю. А., Куричева О. А., Чуличков А. И., Шапкина Н. Е. Восстановление пропусков во временных рядах концентрации CO₂ и температуры воздуха методом математической статистики // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. 2023. Т. 78. № 3. Ст. 2330101. DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2330101.
5. Yuan Z., Ban X., Zhang Z., Li X., Dai H.-N. ODE-RSSM: Learning Stochastic Recurrent State Space Model from Irregularly Sampled Data // *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2023. Vol. 37. No. 9. P. 11060–11068. DOI: 10.1609/aaai.v37i9.26310.
6. Forgiione M., Piga D. Neural State-Space Models: Empirical Evaluation of

Uncertainty Quantification // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 4082–4087. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.1736.

7. Юртин А. А. Восстановление многомерных временных рядов на основе выявления поведенческих шаблонов и применения автоэнкодеров // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2024. Т. 13. № 2. С. 39–55. DOI: 10.14529/cmse240203.

8. Beintema G. I., Schoukens M., Tóth R. Meta-State-Space Learning: An Identification Approach for Stochastic Dynamical Systems // Automatica. 2024. Vol. 167. Art. 111787. DOI: 10.1016/j.automatica.2024.111787.

9. Liu Y., Tóth R., Schoukens M. Physics-Guided State-Space Model Augmentation Using Weighted Regularized Neural Networks // IFAC-PapersOnLine. 2024. Vol. 58. No. 15. P. 295–300. DOI: 10.1016/j.ifacol.2024.08.544.

10. Chen Y., Hu R., Li Z., Yang C., Wang X., Long G., Xu G. Exploring Explicit and Implicit Graph Learning for Multivariate Time Series Imputation // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2024. Vol. 127, Pt. A. Art. 107217. DOI: 10.1016/j.engappai.2023.107217.

11. Краснов Д. И., Волынский М. А., Гусев А. А. Оценка состояния агента с динамикой стохастического характера с помощью рекуррентных фильтров // Информатика и автоматизация. 2025. Т. 24. № 5. С. 1355–1378. DOI: 10.15622/ia.24.5.4.

12. Bemporad A. An L-BFGS-B Approach for Linear and Nonlinear System Identification Under ℓ_1 and Group-Lasso Regularization // IEEE Transactions on Automatic Control. 2025. Vol. 70. No. 7. P. 4857–4864. DOI: 10.1109/TAC.2025.3541018.

13. Lai X., Yao Y., Mu J., Lu W., Zhang L. RATAI: Recurrent Autoencoder with Imputation Units and Temporal Attention for Multivariate Time Series Imputation // Artificial Intelligence Review. 2025. Vol. 58. No. 2. Art. 37. DOI: 10.1007/s10462-024-11039-z.

14. Banitalebi Dehkordi M., Forgione M., Piga D. Uncertainty Quantification in Neural State-Space Models: Applications for Experiment Design and Uncertainty-Aware MPC // *European Journal of Control*. 2025. Vol. 85. Art. 101359. DOI: 10.1016/j.ejcon.2025.101359.
15. Banitalebi Dehkordi M., Forgione M., Cimini G., Frascati L., Piga D. On the Normalization of Gray-Box State-Space Neural Networks // *Automatica*. 2026. Vol. 183. Art. 112659. DOI: 10.1016/j.automatica.2025.112659.
16. Алешновский В. С., Авилов В. К., Голубцов П. В., Курбатова Ю. А., Куричева О. А., Макеев Д. А., Фадеева П. А., Чуличков А. И., Шапкина Н. Е. Восстановление пропусков в многомерных временных рядах методами математической статистики и машинного обучения // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. 2026. № 3. Ст. 2630101.
17. Frank D., Holicki T., Scherer C. W., Staab S. Regularised Neural Network-Based Nonlinear System Identification with Prior System Knowledge // *International Journal of Control*. 2026. Vol. 99. P. 2658–2686. DOI: 10.1080/00207179.2026.2679228.

References

1. Beintema G. I., Schoukens M., Tóth R. Deep Subspace Encoders for Nonlinear System Identification // *Automatica*. 2023. Vol. 156. Art. 111210. DOI: 10.1016/j.automatica.2023.111210.
2. Cymbler M. L., Yurtin A. A. Vosstanovlenie propushhenny`x znachenij vremennogo ryada na osnove sovmestnogo primeneniya analiticheskix algoritmov i nejronny`x setej // *Vy`chislitel`ny`e metody` i programmirovaniye*. 2023. T. 24. № 3. S. 243–259. DOI: 10.26089/NumMet.v24r318.
3. Ansari A. F., Heng A., Lim A., Soh H. Neural Continuous-Discrete State Space Models for Irregularly-Sampled Time Series // *Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning (ICML 2023)*. PMLR. 2023. Vol. 202. P. 926–951.
4. Aleshnovskij V. S., Bezrukova A. V., Avilov V. K., Gazaryan V. A., Kurbatova Yu. A., Kuricheva O. A., Chulichkov A. I., Shapkina N. E. Vosstanovlenie propuskov vo vremenny`x ryadax koncentracii CO<sub>2</sub> i temperatury` vozduxa metodom

- matematicheskoy statistiki // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3: Fizika. Astronomiya. 2023. T. 78. № 3. St. 2330101. DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2330101.
5. Yuan Z., Ban X., Zhang Z., Li X., Dai H.-N. ODE-RSSM: Learning Stochastic Recurrent State Space Model from Irregularly Sampled Data // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2023. Vol. 37. No. 9. P. 11060–11068. DOI: 10.1609/aaai.v37i9.26310.
6. Forgione M., Piga D. Neural State-Space Models: Empirical Evaluation of Uncertainty Quantification // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56. No. 2. P. 4082–4087. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.1736.
7. Yurtin A. A. Vosstanovlenie mnogomerny`x vremenny`x ryadov na osnove vy`yavleniya povedencheskix shablonov i primeneniya avtoe`nkoderov // Vestnik Yuzhno-Ural`skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vy`chislitel`naya matematika i informatika. 2024. T. 13. № 2. S. 39–55. DOI: 10.14529/cmse240203.
8. Beintema G. I., Schoukens M., Tóth R. Meta-State-Space Learning: An Identification Approach for Stochastic Dynamical Systems // Automatica. 2024. Vol. 167. Art. 111787. DOI: 10.1016/j.automatica.2024.111787.
9. Liu Y., Tóth R., Schoukens M. Physics-Guided State-Space Model Augmentation Using Weighted Regularized Neural Networks // IFAC-PapersOnLine. 2024. Vol. 58. No. 15. P. 295–300. DOI: 10.1016/j.ifacol.2024.08.544.
10. Chen Y., Hu R., Li Z., Yang C., Wang X., Long G., Xu G. Exploring Explicit and Implicit Graph Learning for Multivariate Time Series Imputation // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2024. Vol. 127, Pt. A. Art. 107217. DOI: 10.1016/j.engappai.2023.107217.
11. Krasnov D. I., Voly`nskiy M. A., Gusev A. A. Ocenka sostoyaniya agenta s dinamikoj stoxasticheskogo xaraktera s pomoshh`yu rekurrentny`x fil`trov // Informatika i avtomatizaciya. 2025. T. 24. № 5. S. 1355–1378. DOI: 10.15622/ia.24.5.4.
12. Bemporad A. An L-BFGS-B Approach for Linear and Nonlinear System

Identification Under ℓ_1 and Group-Lasso Regularization // IEEE Transactions on Automatic Control. 2025. Vol. 70. No. 7. P. 4857–4864. DOI: 10.1109/TAC.2025.3541018.

13. Lai X., Yao Y., Mu J., Lu W., Zhang L. RATAI: Recurrent Autoencoder with Imputation Units and Temporal Attention for Multivariate Time Series Imputation // Artificial Intelligence Review. 2025. Vol. 58. No. 2. Art. 37. DOI: 10.1007/s10462-024-11039-z.

14. Banitalebi Dehkordi M., Forgione M., Piga D. Uncertainty Quantification in Neural State-Space Models: Applications for Experiment Design and Uncertainty-Aware MPC // European Journal of Control. 2025. Vol. 85. Art. 101359. DOI: 10.1016/j.ejcon.2025.101359.

15. Banitalebi Dehkordi M., Forgione M., Cimini G., Frascati L., Piga D. On the Normalization of Gray-Box State-Space Neural Networks // Automatica. 2026. Vol. 183. Art. 112659. DOI: 10.1016/j.automatica.2025.112659.

16. Aleshnovskij V. S., Avilov V. K., Golubczov P. V., Kurbatova Yu. A., Kuricheva O. A., Makeev D. A., Fadeeva P. A., Chulichkov A. I., Shapkina N. E. Vosstanovlenie propuskov v mnogomerny`x vremenny`x ryadax metodami matematicheskoy statistiki i mashinnogo obucheniya // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3: Fizika. Astronomiya. 2026. № 3. St. 2630101.

17. Frank D., Holicki T., Scherer C. W., Staab S. Regularised Neural Network-Based Nonlinear System Identification with Prior System Knowledge // International Journal of Control. 2026. Vol. 99. P. 2658–2686. DOI: 10.1080/00207179.2026.2679228.

Статья поступила в редакцию 03.04.2026; одобрена после рецензирования 07.05.2026; принята к публикации 14.05.2026.

The article was submitted 03.04.2026; approved after reviewing 07.05.2026; accepted for publication 14.05.2026.