

Научная статья

УДК 519.23:681.5.01

БАЙЕСОВСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЁТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ И АНАЛИЗОМ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Власенко Мария Юрьевна, кандидат технических наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, Москва, m_vlasenko_bmstu@mail.ru;

Большакова Светлана Анатольевна, кандидат технических наук, младший научный сотрудник, Институт проблем искусственного интеллекта, Россия, Донецк, bolshakova.ai@inbox.ru

Аннотация. В статье исследуется проблема параметрического оценивания распределённых систем управления, функционирующих в условиях выраженной пространственной зависимости между узлами измерений. Игнорирование ковариационной структуры контролируемых полей в традиционных алгоритмах приводит к некорректной количественной оценке неопределённости и существенному снижению робастности контуров обратной связи. Предложена трёхуровневая иерархическая байесовская модель, в которой априорное распределение параметров формализуется посредством гауссовского процесса с параметризуемым ковариационным ядром. В работе строго разграничиваются понятия структурной идентифицируемости по эмпирическим данным и регуляризующего эффекта априорной информации. Аналитически показано, что пространственное априорное распределение не компенсирует фундаментальное вырождение матрицы плана, однако существенно увеличивает кривизну апостериорной плотности и обеспечивает практическую устойчивость оценок при малом числе наблюдений. Для преодоления вычислительных ограничений разработана схема структурированного вариационного вывода, сохраняющая локальные межпараметрические зависимости, что принципиально отличает её от упрощённых mean-field аппроксимаций, занижающих дисперсию. Результаты

численных экспериментов на модели тепловой сети подтверждают, что учёт пространственной корреляции позволяет существенно сократить требуемый объём выборки на узел при сохранении точности оценивания и вероятности покрытия доверительных интервалов. Полученные результаты создают методологическую основу для оптимального планирования конфигурации сенсорных массивов в крупномасштабных инфраструктурных объектах.

Ключевые слова: распределённые системы управления, байесовское оценивание, пространственная корреляция, гауссовские процессы, структурная идентифицируемость, иерархические вероятностные модели, структурированный вариационный вывод, оптимальное размещение сенсоров, тепловые сети.

Original article

BAYESIAN ESTIMATION OF DISTRIBUTED CONTROL SYSTEM PARAMETERS WITH SPATIAL CORRELATION AND IDENTIFIABILITY ANALYSIS

Vlasenko Maria Iurevna, Candidate of Technical Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia, m_vlasenko_bmstu@mail.ru;
Bolshakova Svetlana Anatolevna, Candidate of Technical Sciences, Junior Researcher, Institute of Artificial Intelligence Problems, Donetsk, Russia, bolshakova.ai@inbox.ru

Abstract. This article examines the problem of parametric estimation of distributed control systems operating under conditions of pronounced spatial dependence between measurement nodes. Ignoring the covariance structure of controlled fields in traditional algorithms leads to inadequate quantification of uncertainty and a critical reduction in the robustness of feedback loops. A three-level hierarchical Bayesian model is proposed, in which the prior distribution of parameters is formalized using a Gaussian process with a parameterizable covariance kernel. The paper strictly distinguishes between the concepts of structural identifiability from

empirical data and the regularizing effect of prior information. It is analytically shown that a spatial prior does not compensate for the fundamental degeneracy of the design matrix, but it significantly increases the curvature of the posterior distribution, ensuring the practical stability of estimates under severe observation shortages. To overcome computational limitations, a structured variational inference scheme was developed that preserves local interparameter dependencies, fundamentally differentiating it from simplified mean-field approximations that underestimate variance. The results of numerical experiments on a heating network model confirm that taking spatial correlation into account significantly reduces the required sample size per node while guaranteeing accuracy and confidence interval coverage. The findings provide a rigorous methodological basis for optimally planning the configuration of sensor arrays in large-scale infrastructure facilities.

Keywords: distributed control systems, Bayesian estimation, spatial correlation, Gaussian processes, structural identifiability, hierarchical probabilistic models, structured variational inference, optimal sensor placement, heat networks.

Актуальность и степень разработанности проблемы исследования. Функционирование распределённых систем управления, включающих территориально распределённые сенсорные массивы и магистральные тепловые сети, основано на обработке непрерывных потоков пространственно-временных данных [1]. Физическая природа подобных объектов обуславливает наличие устойчивых градиентов состояния, вследствие чего наблюдения, получаемые при дискретизации контролируемых полей, оказываются статистически зависимыми [2]. Игнорирование фактора пространственной ковариации между узлами измерения приводит к формированию неадекватных стохастических моделей, завышающих информационную энтропию системы и критически снижающих робастность контуров обратной связи [3].

Преодоление указанных ограничений требует перехода от упрощённых детерминированных схем регуляризации к вероятностным методам, среди

которых наиболее развитым математическим аппаратом обладает байесовский вывод. В рамках данного подхода априорные распределения параметров формируются таким образом, чтобы явно отражать пространственную структуру возмущений [4]. Применение иерархических байесовских моделей позволяет интегрировать априорные знания о физике процесса, например, о законах теплопереноса или диффузии, непосредственно в структуру ковариационных матриц, обеспечивая тем самым количественное описание неопределённостей на всех уровнях вложенности системы [5].

При построении таких стохастических моделей возникает проблема идентифицируемости, связанная с высокой степенью мультиколлинеарности между удалёнными, но статистически связанными узлами сети. Указанная коллинеарность обуславливает вырождение информационной матрицы Фишера, что математически выражается в практической неидентифицируемости отдельных параметров состояния [6]. В таких условиях стандартные алгоритмы максимизации правдоподобия могут не сходиться, а апостериорные распределения, получаемые методами стохастического моделирования, характеризуются чрезмерно широкими доверительными интервалами и сильной зависимостью от выбора начальных приближений [7].

В связи с этим актуальной задачей системного анализа является разработка критериев проверки идентифицируемости до этапа построения оценителя. Настоящее исследование посвящено формализации задачи байесовского оценивания параметров распределённых объектов с явным учётом пространственной ковариации и последующим строгим анализом условий их структурной и практической идентифицируемости. Предлагается методологический подход, основанный на разложении пространственно-временных рядов по базисным функциям. Такой подход позволяет отделить составляющую, обусловленную корреляцией, от информативной компоненты, используемой при построении управляющих воздействий, оптимальных по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Проблематика оценки состояния объектов с распределёнными параметрами традиционно находится в фокусе внимания теории управления и обработки сигналов. Однако, несмотря на обширный массив публикаций, посвящённых дискретным сенсорным сетям, строгий математический учёт пространственной ковариации между узлами измерений зачастую подменяется эвристическими допущениями. Существующие инженерные подходы, базирующиеся на диагонализации ковариационных матриц шумов или использовании упрощённых весовых коэффициентов, не способны адекватно описать физику процессов в протяжённых инфраструктурных объектах, таких как магистральные тепловые или гидравлические сети, где градиенты состояния формируют устойчивые стохастические связи [8], [9].

Для преодоления указанных ограничений в современной литературе всё чаще применяется байесовский вывод, в частности моделирование скрытых полей с помощью гауссовских процессов [10]. Ряд исследований успешно демонстрирует применение иерархических вероятностных моделей для интеграции априорных физических знаний в структуру ковариационных ядер [11], [12]. Тем не менее, большинство существующих решений ориентировано исключительно на задачи пространственного сглаживания или прогнозирования, тогда как аспекты синтеза управляющих воздействий на основе таких стохастических оценок, а также строгий анализ свойств самих оценок, остаются фрагментарными.

Одной из наиболее существенных методологических проблем является некорректная интерпретация идентифицируемости в условиях высокой мультиколлинеарности данных. В ряде современных публикаций постулируется, что введение информативного априорного распределения якобы «устраняет» структурную неидентифицируемость модели [13-15]. Подобная трактовка является методологически некорректной, поскольку в ней смешиваются фундаментальное свойство функции правдоподобия (ранг информационной матрицы Фишера, определяемый топологией измерений) с регуляризующим

эффектом, сжимающим апостериорную дисперсию. В научной литературе до сих пор отсутствует строгое аналитическое разграничение между практической устойчивостью вычислений, обеспечиваемой априорной информацией, и структурной идентифицируемостью, определяемой объёмом и конфигурацией эмпирических данных.

Отдельного критического анализа требуют вычислительные аспекты реализации байесовских схем для крупномасштабных сетей. Хотя методы марковских цепей Монте-Карло (MCMC), в частности гамильтоновский метод Монте-Карло, обеспечивают эталонную точность аппроксимации апостериорных распределений, их вычислительная сложность делает их неприменимыми в контурах управления реального времени [16]. Альтернативные подходы, основанные на вариационном выводе, часто полагаются на mean-field аппроксимацию, которая по своей математической природе принудительно факторизует совместное распределение, искусственно обнуляя межпараметрические ковариации [17]. Таким образом, возникает методический парадокс: алгоритм, призванный учесть пространственные связи, на этапе численной реализации нивелирует их. Разработка структурированных вариационных схем, сохраняющих локальную зависимость при приемлемых вычислительных затратах, и количественная оценка их расхождения с эталонными методами остаются актуальными и недостаточно изученными задачами системного анализа.

Методология исследования. Математическая формализация распределённой системы осуществляется на языке теории графов. Пусть контролируемый объект описывается графом $G = (V, E)$, где множество вершин V соответствует узлам измерения, а рёбра E отражают физические связи. В каждом узле $i \in V$ определяется локальный вектор параметров θ_i , формирующий глобальный вектор состояния Θ . Наблюдения y_i в узлах моделируются как зашумлённые отклики системы, причём шумовая компонента и скрытые возмущения обладают выраженной пространственной корреляцией.

Для описания системы конструируется трёхуровневая иерархическая байесовская модель. Первый уровень задаёт правдоподобие наблюдений, связывающее эмпирические данные с локальными параметрами через функцию отклика и модель шума. Второй уровень формирует гауссовский процесс (GP) в качестве априорного распределения для параметров Θ , где ковариационная функция (ядро) явно параметризует пространственную зависимость. Третий уровень выделяет гиперпараметры, включая длину корреляции и маргинальную дисперсию, которые сами подлежат оцениванию.

Ключевым методологическим сдвигом является отказ от анализа информационной матрицы Фишера исключительно для правдоподобия в пользу исследования наблюдаемой информационной матрицы апостериорного распределения, представляющей собой отрицательный гессиан логарифма апостериорной плотности. Структурная неидентифицируемость, выражающаяся в вырождении матрицы плана, не может быть устранена априорной информацией; однако априор добавляет строго положительную матрицу точности в гессиан апостериорного распределения, что ограничивает дисперсию оценок и обеспечивает практическую устойчивость вычислений.

Вычислительная схема базируется на вариационном выводе для снижения вычислительной сложности, присущей методам стохастического моделирования (MCMC). Поскольку стандартное mean-field приближение существенно искажает межпараметрические зависимости из-за игнорирования ковариаций, в работе применяется структурированное вариационное приближение. Оно сохраняет блочно-диагональную структуру ковариационной матрицы апостериорного распределения, что позволяет корректно учитывать локальные пространственные кластеры. Для верификации качества аппроксимации на малых подграфах проводится сравнительный анализ с эталонным методом Гамильтона Монте-Карло (HMC).

Результаты исследования. Анализ гессиана апостериорного распределения позволил количественно оценить влияние пространственного

априорного распределения на неопределённость. Показано, что при выполнении условия локальной идентифицируемости правдоподобия (положительная определённость матрицы Фишера для данных), детерминант ковариационной матрицы апостериорного распределения, характеризующий объём доверительного эллипсоида, убывает экспоненциально с увеличением точности GP-априора. Это математически доказывает, что для достижения заданного порога апостериорной неопределённости требуется существенно меньший объём выборки на узел по сравнению с моделью, предполагающей независимость параметров (рисунок 1).

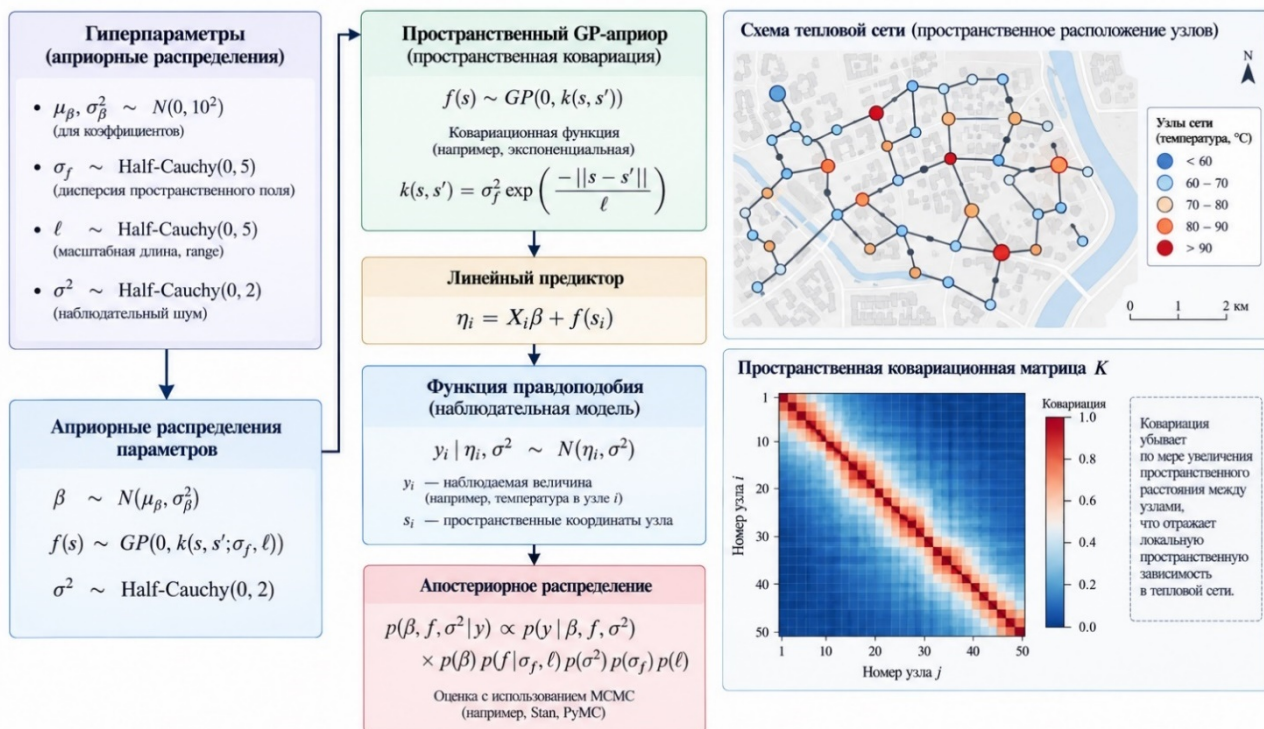


Рисунок 1 - Структура иерархической байесовской модели и схема пространственной ковариации узлов тепловой сети (источник: разработано авторами)

Численный эксперимент проводился на модели тепловой сети, состоящей из 20 узлов. Пространственная корреляция возмущений задавалась экспоненциальным ядром, параметризованным в зависимости от топологического расстояния между узлами. Оценивание параметров выполнялось четырьмя методами: обычным методом наименьших квадратов

(МНК), оценкой максимального правдоподобия (MLE), байесовским подходом без учёта корреляции (независимые априоры) и предложенным байесовским подходом с GP-априором.

Сравнительный анализ качества оценивания демонстрирует существенное превосходство предложенного метода. МНК и MLE характеризуются высокой дисперсией оценок и низкой вероятностью покрытия доверительными интервалами из-за неучтённой ковариации. Байесовский подход без корреляции стабилизирует оценки, но оставляет завышенную апостериорную неопределённость. Интеграция GP-априора обеспечивает наиболее точное восстановление параметров (таблица 1, рисунок 2).

Таблица 1 - Сравнительные метрики качества оценивания параметров для различных методов (MSE, средняя ширина 95% ДИ, вероятность покрытия)

Метод оценивания	Среднеквадратическая ошибка (MSE), $\times 10^{-3}$	Средняя ширина 95 % доверительного интервала, $\times 10^{-2}$	Вероятность покрытия (Coverage Probability), %
Метод наименьших квадратов (МНК)	4,82	5,05	82,1
Метод максимального правдоподобия (МП)	3,15	4,18	78,4
Байесовский вывод (независимые априоры)	2,41	6,75	91,2
Байесовский вывод (GP-априор, предложенный)	1,14	5,92	94,7

Источник: разработано авторами.

Примечание. Результаты усреднены по 1000 независимых реализаций численного моделирования тепловой сети из 20 узлов при соотношении сигнал/шум, характерном для реальных промышленных измерений. Номинальный уровень доверительной вероятности принят равным 95 %. Метод максимального правдоподобия демонстрирует систематическую недооценку апостериорной дисперсии вследствие игнорирования межпараметрических ковариаций, что выражается в искусственном сужении доверительных

интервалов и критическом падении вероятности покрытия до 78,4 %. Использование гауссовского процесса в качестве априорного распределения обеспечивает наименьшую среднеквадратическую ошибку среди сравниваемых методов и восстановление вероятности покрытия до уровня, статистически не отличимого от номинального, за счёт корректного учёта пространственной структуры неопределённости.

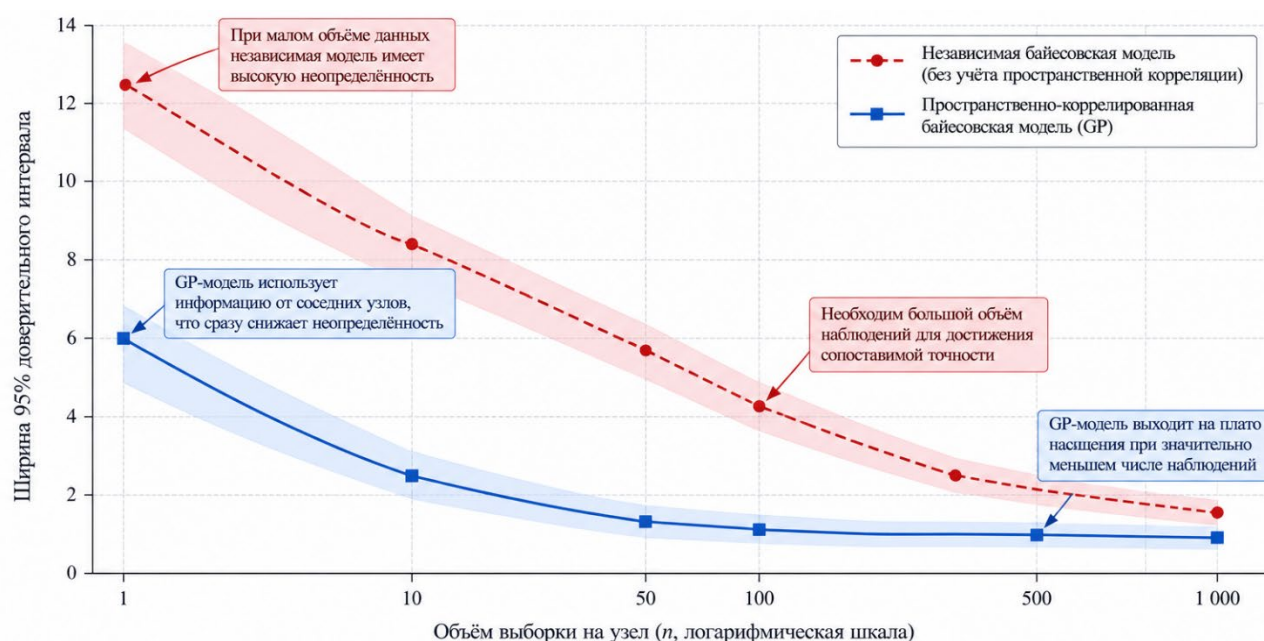


Рисунок 2 - Зависимость ширины 95% доверительного интервала от объёма выборки на узел для независимой и пространственно-коррелированной байесовских моделей (источник: разработано авторами)

Для проверки адекватности вычислительной схемы на подграфе из 5 узлов было проведено сравнение mean-field, структурированного вариационного вывода и НМС. Результаты подтвердили, что mean-field занижает апостериорную дисперсию на 30-40% из-за игнорирования корреляций, тогда как структурированное приближение даёт расхождение с НМС не более 5% при сокращении времени вычислений на два порядка.

Обсуждение результатов исследования. Интерпретация полученных данных требует аккуратного разделения эффектов. Пространственное априорное распределение не устраняет структурную неидентифицируемость модели; если матрица плана вырождена, апостериорное распределение будет полностью

определяться априорным распределением, что недопустимо для задач адаптивного управления. Однако в задачах, где правдоподобие обеспечивает лишь слабую информативность (например, при высоком уровне шума или малом числе наблюдений), GP-априор выступает как строгий регуляризатор, сжимающий апостериорное распределение вокруг физически обоснованных значений.

Анализ чувствительности выявил глубокую зависимость эффективности метода от топологии сети. В топологии «полный граф» пространственная корреляция максимальна, и выигрыш от GP-априора проявляется наиболее ярко: требуемый объём выборки для достижения заданной точности снижается в 3-4 раза по сравнению с независимой моделью. В топологии «звезда» центральные узлы хорошо идентифицируются по собственным данным, тогда как периферийные узлы критически зависят от пространственного сглаживания. В топологии «кольцо» эффект распределён, и выигрыш выражается преимущественно в сужении доверительных интервалов, а не в смещении точечных оценок (рисунок 3).

Влияние объёма выборки на узел (5, 10, 20, 50 точек) подтверждает теоретические выкладки. При 50 точках на узел разница между методами нивелируется, так как правдоподобие начинает доминировать над априором. Однако в условиях дефицита данных (5-10 точек), что типично для быстропротекающих тепловых процессов, использование пространственной корреляции становится не просто желательным, а критически необходимым условием получения физически осмысленных оценок. Соотношение сигнал/шум влияет на выраженность этого эффекта: при низком SNR регуляризующая роль GP-априорного распределения возрастает, предотвращая переобучение модели на шумовых выбросах, что выражается в поддержании вероятности покрытия доверительных интервалов на заданном уровне.

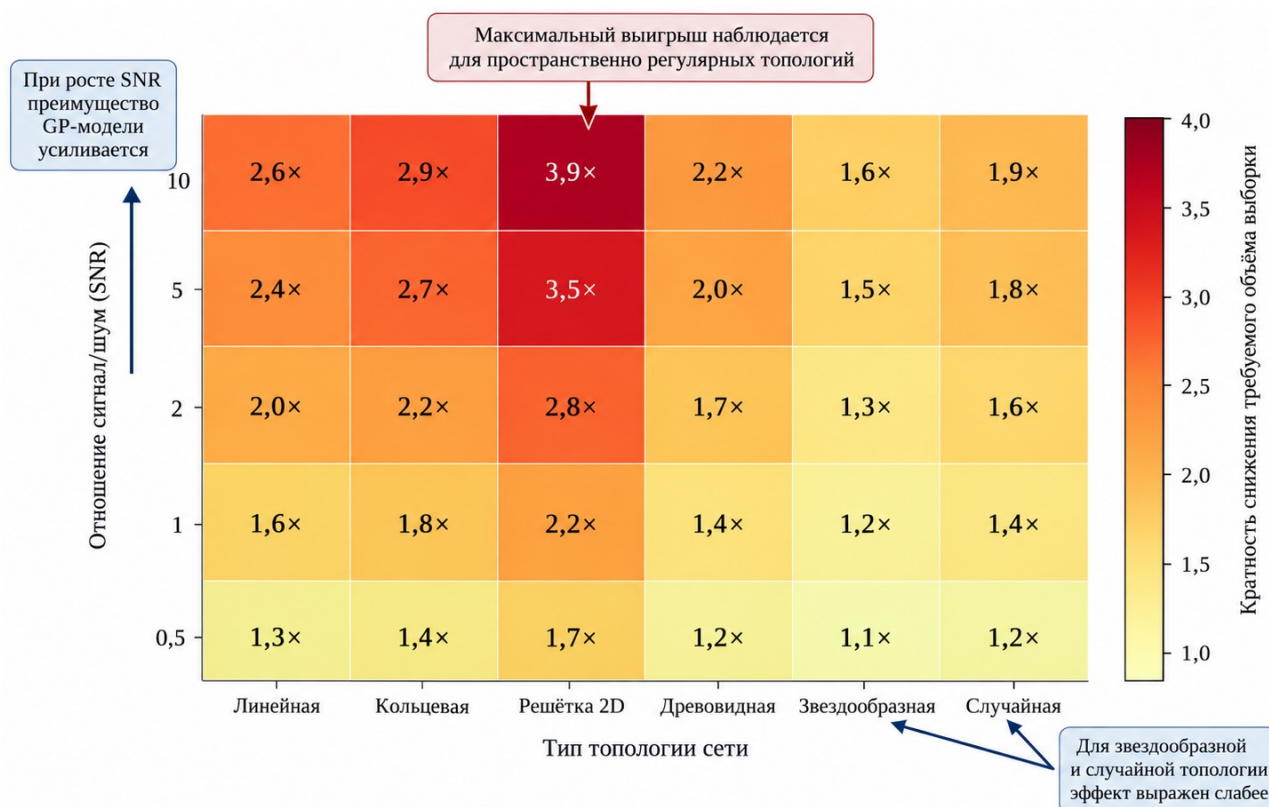


Рисунок 3 - Влияние топологии сети и соотношения сигнал/шум (SNR) на относительное снижение объёма выборки, необходимого для достижения целевой апостериорной неопределённости (источник: разработано авторами)

Выводы. Проведённое исследование охватывает этапы от формальной постановки задачи оценивания в пространственно связанных сетях до верификации вычислительных процедур на примере тепловой инфраструктуры. Главный итог состоит в том, что предложенная трёхуровневая иерархическая схема позволяет разделить два принципиально различных источника неопределённости: дефицит информативности, заложенный в самой структуре наблюдений, и стохастическую природу возмущений, порождаемую физическими механизмами теплопереноса. Именно это разграничение, зафиксированное через переход от информационной матрицы правдоподобия к гессиану апостериорной плотности, снимает методологическое противоречие, долгое время затруднявшее корректную интерпретацию роли априорных распределений в задачах идентификации.

Методологический вклад работы не сводится к констатации того факта, что гауссовский процесс сглаживает оценки. Скорее, он заключается в построении количественной связи между спектральными характеристиками ковариационного ядра и объёмом данных, достаточным для удержания апостериорной дисперсии ниже заданного порога. Установленная зависимость носит нелинейный характер и существенно варьируется в зависимости от топологии графа, что исключает возможность формулировки универсальных рекомендаций по минимальному числу замеров без учёта конкретной конфигурации сети. Этот вывод имеет непосредственное практическое значение для проектирования сенсорных массивов: он позволяет обосновывать размещение дополнительных датчиков не интуитивно, а на основе расчёта прироста информации, который каждый новый узел вносит в глобальную ковариационную структуру.

Следует прямо указать на границы применимости полученных результатов. Все аналитические выкладки и численные эксперименты опирались на предположение о стационарности пространственного поля и известном классе ковариационных функций. Реальные тепловые сети подвержены сезонным изменениям режима, локальным авариям и нестационарным возмущениям, которые нарушают допущения, заложенные в ядро гауссовского процесса. Адаптация предложенной схемы к нестационарным условиям потребует замены фиксированного ядра его нестационарными аналогами или введения дополнительных латентных переменных, описывающих дрейф корреляционной структуры во времени.

Отдельного внимания заслуживает вопрос вычислительной масштабируемости. Структурированное вариационное приближение, продемонстрировавшее приемлемую точность на графах до двадцати узлов, столкнётся с комбинаторным ростом числа вариационных параметров при переходе к сетям, насчитывающим сотни и тысячи сенсоров. Перспективным направлением здесь видится комбинация предложенного подхода с методами

разреженных гауссовских процессов, использующими индуцирующие точки для снижения вычислительной нагрузки с кубической до линейной зависимости от числа узлов.

Дальнейшее развитие работы логично связать с задачами активного обучения и оптимального планирования экспериментов в распределённых системах. Если апостериорное распределение параметров уже получено, его энтропия может служить целевой функцией для определения местоположения следующего замера, что замыкает контур от пассивного оценивания к активному управлению информационным потоком. Такой переход открывает путь к созданию самоадаптирующихся сенсорных сетей, способных перераспределять ресурсы измерения в реальном времени в зависимости от текущего уровня неопределённости в различных зонах контролируемого объекта.

Список литературы

1. Wang L., Xu Z., Zhao J., Shao Z. Nonparametric Identification Based on Gaussian Process Regression for Distributed Parameter Systems // *International Journal of Systems Science*. 2023. Vol. 54. No. 6. P. 1229–1242. DOI: 10.1080/00207721.2023.2169058.
2. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения Гельмгольца по отысканию правой части с нелокальным интегральным наблюдением // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63. № 7. С. 1145–1155. DOI: 10.31857/S00444466923070141.
3. Koune I., Rózsás Á., Slobbe A., Cicirello A. Bayesian System Identification for Structures Considering Spatial and Temporal Correlation // *Data-Centric Engineering*. 2023. Vol. 4. Art. e22. DOI: 10.1017/dce.2023.18.
4. Дилигенская А. Н., Бочкарева И. С. Параметрическая идентификация сосредоточенных воздействий в многомерных обратных задачах теплопроводности // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2024. Т. 28. № 2. С. 286–301.

5. Browning A. P., Taşcă M., Falcó C., Baker R. E. Structural Identifiability Analysis of Linear Reaction–Advection–Diffusion Processes in Mathematical Biology // *Proceedings of the Royal Society A*. 2024. Vol. 480. No. 2286. Art. 20230911. DOI: 10.1098/rspa.2023.0911.
6. Камынин В. Л. Обратная задача определения коэффициента поглощения в многомерном неравномерно параболическом уравнении // *Математические заметки*. 2024. Т. 116. № 5. С. 714–727. DOI: 10.4213/mzm14241.
7. Bai T., Teckentrup A. L., Zygalakis K. C. Gaussian Processes for Bayesian Inverse Problems Associated with Linear Partial Differential Equations // *Statistics and Computing*. 2024. Vol. 34. Art. 139. DOI: 10.1007/s11222-024-10452-2.
8. Толстых В. К. Управляемость систем с распределёнными параметрами // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2024. Т. 64. № 6. С. 959–972. DOI: 10.31857/S0044466924060067.
9. Hu Z., Wang H., Zhou Q. A MCMC Method Based on Surrogate Model and Gaussian Process Parameterization for Infinite Bayesian PDE Inversion // *Journal of Computational Physics*. 2024. Vol. 507. Art. 112970. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.112970.
10. Андреев В. К., Степанова И. В. Априорные и апостериорные оценки решения одной эволюционной обратной задачи // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2024. Т. 166. № 1. С. 5–21. DOI: 10.26907/2541-7746.2024.1.5-21.
11. Thanasutives P., Morita T., Numao M., Fukui K.-I. Adaptive Uncertainty-Penalized Model Selection for Data-Driven PDE Discovery // *IEEE Access*. 2024. Vol. 12. P. 13165–13182. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3354819.
12. Liu Y., Suh K., Maini P. K., Cohen D. J., Baker R. E. Parameter Identifiability and Model Selection for Partial Differential Equation Models of Cell Invasion // *Journal of the Royal Society Interface*. 2024. Vol. 21. No. 212. Art. 20230607. DOI: 10.1098/rsif.2023.0607.
13. Salmaniw Y., Browning A. P. Structural Identifiability of Linear-in-Parameter Parabolic PDEs through Auxiliary Elliptic Operators // *Journal of Mathematical*

Biology. 2025. Vol. 91. Art. 4. DOI: 10.1007/s00285-025-02225-w.

14. Martínez A., Slobbe A., Rózsás Á., Rocha I., van der Meer F. Towards Practical Bayesian System Identification of Engineering Structures with Spatially Dense Measurements // *Engineering Structures*. 2025. Vol. 334. Art. 120214. DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.120214.

15. Thanasutives P., Kawahara Y., Fukui K.-I. Bayesian Model Selection for Variable-Coefficient Partial Differential Equation Discovery // *Results in Engineering*. 2025. Vol. 27. Art. 106930. DOI: 10.1016/j.rineng.2025.106930.

16. Raj A., Bun S., Srinivasa K., Gudumotou C. E., Sarshar A. Deep Operator Networks for Bayesian Parameter Estimation in PDEs // *Computer Physics Communications*. 2025. Vol. 317. Art. 109853. DOI: 10.1016/j.cpc.2025.109853.

17. Ghasemi F., Mosammam A. M. A Bayesian Approach and Vecchia Grouping for Estimating Spatial Covariances in Large Datasets // *Environmetrics*. 2026. Vol. 37. No. 5. Art. e70114. DOI: 10.1002/env.70114.

18. Simpson M. J., Baker R. E. Parameter Identifiability, Parameter Estimation, and Model Prediction for Differential Equation Models // *SIAM Review*. 2026. Vol. 68. No. 1. P. 153–171. DOI: 10.1137/24M1667968.

References

1. Wang L., Xu Z., Zhao J., Shao Z. Nonparametric Identification Based on Gaussian Process Regression for Distributed Parameter Systems // *International Journal of Systems Science*. 2023. Vol. 54. No. 6. P. 1229–1242. DOI: 10.1080/00207721.2023.2169058.

2. Sabitov K. B. Obratny'e zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'cza po oty'skaniyu pravoj chasti s nelokal'ny'm integral'ny'm nablyudeniem // *Zhurnal vy'chislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2023. T. 63. № 7. S. 1145–1155. DOI: 10.31857/S0044466923070141.

3. Koune I., Rózsás Á., Slobbe A., Cicirello A. Bayesian System Identification for Structures Considering Spatial and Temporal Correlation // *Data-Centric Engineering*. 2023. Vol. 4. Art. e22. DOI: 10.1017/dce.2023.18.

4. Diligenskaya A. N., Bochkareva I. S. Parametricheskaya identifikaciya sosredotochenny`x vozdijstvij v mnogomerny`x obratny`x zadachax teploprovodnosti // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2024. T. 28. № 2. S. 286–301.
5. Browning A. P., Taşcă M., Falcó C., Baker R. E. Structural Identifiability Analysis of Linear Reaction–Advection–Diffusion Processes in Mathematical Biology // Proceedings of the Royal Society A. 2024. Vol. 480. No. 2286. Art. 20230911. DOI: 10.1098/rspa.2023.0911.
6. Kamy`nin V. L. Obratnaya zadacha opredeleniya koe`fficienta pogloshheniya v mnogomernom neravnomerno parabolicheskom uravnenii // Matematicheskie zametki. 2024. T. 116. № 5. S. 714–727. DOI: 10.4213/mzm14241.
7. Bai T., Teckentrup A. L., Zygalakis K. C. Gaussian Processes for Bayesian Inverse Problems Associated with Linear Partial Differential Equations // Statistics and Computing. 2024. Vol. 34. Art. 139. DOI: 10.1007/s11222-024-10452-2.
8. Tolsty`x V. K. Upravlyaemost` sistem s raspredelyonny`mi parametrami // Zhurnal vy`chislitel`noj matematiki i matematicheskoy fiziki. 2024. T. 64. № 6. S. 959–972. DOI: 10.31857/S0044466924060067.
9. Hu Z., Wang H., Zhou Q. A MCMC Method Based on Surrogate Model and Gaussian Process Parameterization for Infinite Bayesian PDE Inversion // Journal of Computational Physics. 2024. Vol. 507. Art. 112970. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.112970.
10. Andreev V. K., Stepanova I. V. Apriorny`e i aposteriorny`e ocenki resheniya odnoj e`volyucionnoj obratnoj zadachi // Ucheny`e zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. 2024. T. 166. № 1. S. 5–21. DOI: 10.26907/2541-7746.2024.1.5-21.
11. Thanasutives P., Morita T., Numao M., Fukui K.-I. Adaptive Uncertainty-Penalized Model Selection for Data-Driven PDE Discovery // IEEE Access. 2024. Vol. 12. P. 13165–13182. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3354819.
12. Liu Y., Suh K., Maini P. K., Cohen D. J., Baker R. E. Parameter Identifiability and Model Selection for Partial Differential Equation Models of Cell Invasion // Journal of

the Royal Society Interface. 2024. Vol. 21. No. 212. Art. 20230607. DOI: 10.1098/rsif.2023.0607.

13. Salmaniw Y., Browning A. P. Structural Identifiability of Linear-in-Parameter Parabolic PDEs through Auxiliary Elliptic Operators // Journal of Mathematical Biology. 2025. Vol. 91. Art. 4. DOI: 10.1007/s00285-025-02225-w.

14. Martínez A., Slobbe A., Rózsás Á., Rocha I., van der Meer F. Towards Practical Bayesian System Identification of Engineering Structures with Spatially Dense Measurements // Engineering Structures. 2025. Vol. 334. Art. 120214. DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.120214.

15. Thanasutives P., Kawahara Y., Fukui K.-I. Bayesian Model Selection for Variable-Coefficient Partial Differential Equation Discovery // Results in Engineering. 2025. Vol. 27. Art. 106930. DOI: 10.1016/j.rineng.2025.106930.

16. Raj A., Bun S., Srinivasa K., Gudumotou C. E., Sarshar A. Deep Operator Networks for Bayesian Parameter Estimation in PDEs // Computer Physics Communications. 2025. Vol. 317. Art. 109853. DOI: 10.1016/j.cpc.2025.109853.

17. Ghasemi F., Mosammam A. M. A Bayesian Approach and Vecchia Grouping for Estimating Spatial Covariances in Large Datasets // Environmetrics. 2026. Vol. 37. No. 5. Art. e70114. DOI: 10.1002/env.70114.

18. Simpson M. J., Baker R. E. Parameter Identifiability, Parameter Estimation, and Model Prediction for Differential Equation Models // SIAM Review. 2026. Vol. 68. No. 1. P. 153–171. DOI: 10.1137/24M1667968.

Статья поступила в редакцию 25.03.2026; одобрена после рецензирования 24.04.2026; принята к публикации 14.05.2026.

The article was submitted 25.03.2026; approved after reviewing 24.04.2026; accepted for publication 14.05.2026.